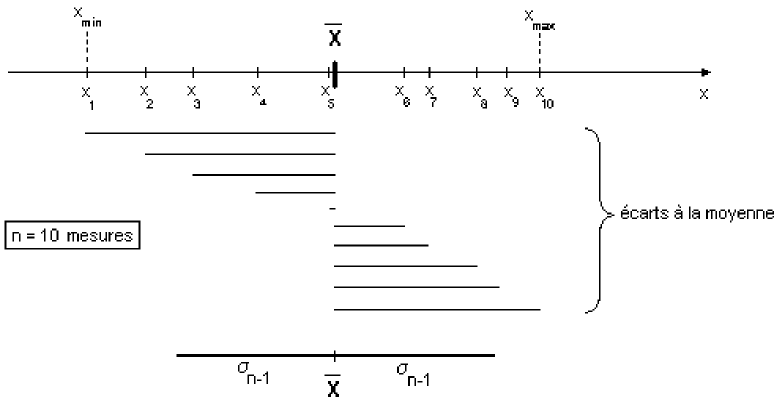
ÉTUDE STATISTIQUE D'UNE SÉRIE DE MESURES

On a fait un certain nombre de mesures expérimentales d'une grandeur physique x (avec un protocole ne comportant **pas d'erreur systématique notable**). On appelle n le nombre de mesures.



MESURES INDÉPENDANTES

Des mesures sont considérées comme **indépendantes** si elles sont effectuées par des manipulateurs différents sur des appareillages différents (mais du même type) en suivant le même protocole.

Dans le cas contraire (manipulateurs utilisant successivement le même matériel ou manipulateur unique utilisant successivement plusieurs appareils), les mesures sont dites **corrélées**.

MOYENNE

La moyenne, $\overline{X}$, des n mesures **indépendantes**, de qualité comparable (donc après avoir écarté les mesures manifestement aberrantes, signes d'un incident de manipulation), représente le **meilleur estimateur collectif** de la grandeur mesurée.

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + \ldots\ldots + x_n}{n}}$$

ÉTENDUE

L'étendue de la série de mesures est définie par :

$$\boxed{r = X_{max} - X_{min}}$$

ÉCART-TYPE

L'écart-type, σ_n, caractérise **la dispersion** d'une série de mesures autour de la moyenne : il est défini à partir de l'écart quadratique moyen.

La théorie mathématique montre que, pour un petit nombre de mesures, un **meilleur estimateur de l'écart-type est s_{n-1}** (appelé aussi S_n , ou S_x sur certaines calculatrices) défini ci-contre :

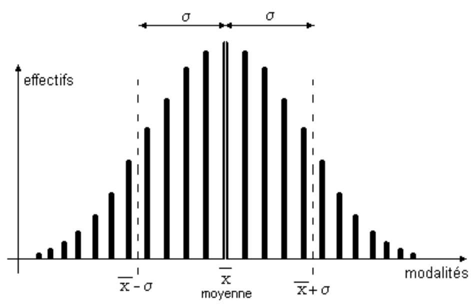
$$\boxed{s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}}} \qquad \boxed{s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}}}$$

66% des valeurs expérimentales appartiennent à l'intervalle :

$$[\ \overline{X} - s_{n-1}\ ,\ \ \overline{X} + s_{n-1}\ ]$$

95 % des valeurs expérimentales appartiennent à l'intervalle :

$$[\ \overline{X} - 2\,s_{n-1}\ ,\ \ \overline{X} + 2\,s_{n-1}\ ]$$



PRÉCISION DE LA MESURE

La quantité $\sigma_{n-1}/\overline{X}$ (exprimée en %) représente un bon estimateur de la précision relative des mesures individuelles.

$$\boxed{\text{estimateur de la précision} = \frac{s_{n-1}}{\overline{X}} \times 100}$$

INTERVALLE DE CONFIANCE

Il est possible d'approcher la vraie valeur de la grandeur X avec une certaine probabilité. On définit en calcul des probabilités un intervalle auquel appartient une grandeur inconnue dont on fait un certain nombre de mesures expérimentales.
Soit t_n un coefficient, appelé coefficient de Student, dépen-dant du nombre de mesures et du degré de probabilité souhaité.
La grandeur X mesurée a une probabilité de p % de se trouver dans l'intervalle défini ci-contre:

$$\boxed{\overline{X} - t_n \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \le X \le \overline{X} + t_n \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}$$

EXEMPLE D'UTILISATION

Au cours d'une séance de T.P., 24 groupes d'élèves ont déterminé expérimentalement (en suivant le même protocole sans erreur systématique) la concentration d'une solution d'ions ferreux et ont obtenu les résultats suivants :

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
[Fe^{2+}] (mol.L^{-1})	0,17	0,17	0,18	0,17	0,18	0,19	0,17	0,17
N°	9	10	11	12	13	14	15	16
[Fe^{2+}] (mol.L^{-1})	0,18	0,17	0,19	0,16	0,18	0,16	0,17	0,18
N°	17	18	19	20	21	22	23	24
[Fe^{2+}] (mol.L^{-1})	0,17	0,19	0,18	0,17	0,17	0,18	0,17	0,18

n = 24 mesures (aucune valeur aberrante àécarter)

moyenne $\overline{X}$ = 0,175 mol.L^{-1}

estimateur de l'écart-type $\sigma_{n-1} = 0{,}0083$ mol.L^{-1}

66% des mesures expérimentales sont donc dans l'intervalle :
[0,167 ; 0,183]

estimateur de la précision de mesure :

$$\frac{s_{n-1}}{\overline{X}} \times 100 = \frac{0{,}0083 \times 100}{0{,}175} = 4{,}7\ \%$$

Si on choisit un intervalle de confiance de 95 %, on a la valeur de $t_{24} = 2{,}07$.

$$0{,}175 - 2{,}07 \times \frac{0{,}0083}{\sqrt{24}} \leq \left[Fe^{2+}\right] \leq 0{,}175 + 2{,}07 \times \frac{0{,}0083}{\sqrt{24}}$$

On a une probabilité de 95 % que la valeur réelle de la concentration cherchée se trouve dans l'intervalle :

0,172 mol.L^{-1} £[Fe^{2+}] £0,178 mol.L^{-1}

Si on choisit un intervalle de confiance de 70 %, on a la valeur de $t_{24} = 1{,}06$

$$0{,}175 - 1{,}06 \times \frac{0{,}0083}{\sqrt{24}} \leq \left[Fe^{2+}\right] \leq 0{,}175 + 1{,}06 \times \frac{0{,}0083}{\sqrt{24}}$$

On a une probabilité de 70 % que la valeur réelle de la concentration cherchée se trouve dans l'intervalle :

0,173 mol.L^{-1} £[Fe^{2+}] £0,177 mol.L^{-1}

	coefficient, t, de Student pour différents niveaux de confiance				
p =	**99%**	**95%**	**80%**	**70%**	**60%**
n (nombre de mesures de l'expérience)					
2	63,66	12,71	3,08	1,96	1,38
3	9,92	4,30	1,89	1,39	1,06
4	5,84	3,18	1,64	1,25	0,98
5	4,60	2,78	1,53	1,19	0,94
6	4,03	2,57	1,48	1,16	0,92
7	3,71	2,45	1,44	1,13	0,91
8	3,50	2,36	1,41	1,12	0,90
9	3,36	2,31	1,40	1,11	0,89
10	3,25	2,26	1,38	1,10	0,88
11	3,17	2,23	1,37	1,09	0,88
12	3,11	2,20	1,36	1,09	0,88
13	3,05	2,18	1,36	1,08	0,87
14	3,01	2,16	1,35	1,08	0,87
15	2,98	2,14	1,35	1,08	0,87
16	2,95	2,13	1,34	1,07	0,87
17	2,92	2,12	1,34	1,07	0,86
18	2,90	2,11	1,33	1,07	0,86
19	2,88	2,10	1,33	1,07	0,86
20	2,86	2,09	1,33	1,07	0,86
21	2,85	2,09	1,33	1,06	0,86
22	2,83	2,08	1,32	1,06	0,86
23	2,82	2,07	1,32	1,06	0,86
24	2,81	2,07	1,32	1,06	0,86
25	2,80	2,06	1,32	1,06	0,86
26	2,79	2,06	1,32	1,06	0,86
27	2,78	2,06	1,31	1,06	0,86
28	2,77	2,05	1,31	1,06	0,86
29	2,76	2,05	1,31	1,06	0,85
30	2,76	2,05	1,31	1,06	0,85